Álgebras y σ-álgebras
Miguel Ángel García Álvarez

Definición 1. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{G}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Diremos que:*

1. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo complementos si $A^c \in \mathcal{G}$ para cualquier $A \in \mathcal{G}$.*
2. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo diferencias propias si $B - A \in \mathcal{G}$ para cualquier pareja $A, B \in \mathcal{G}$ tal que $A \subset B$.*
3. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo uniones (resp. intersecciones) finitas si $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{G}$ (resp. $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{G}$) para cualquier colección finita $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de elementos de $\mathcal{G}$.*
4. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo uniones (resp. intersecciones) infinitas numerables si $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{G}$ (resp. $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{G}$) para cualquier colección infinita numerable $A_1, A_2, A_3, \ldots$ de elementos de $\mathcal{G}$.*
5. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo uniones (resp. intersecciones) monótonas si $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{G}$ (resp. $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{G}$) para cualquier sucesión creciente (resp. decreciente) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{G}$.*

Definición 2 (**álgebra**)**.** *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto. Se dice que una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{F}$ es un álgebra si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$\mathbb{F} \in \mathcal{A}$.*
2. *$\mathcal{A}$ es cerrada bajo complementos.*
3. *$\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones finitas.*

Un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{F}$ también es cerrada bajo intersecciones finitas y diferencias ya que, si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces:

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$$

$$A - B = A \cap B^c$$

Definición 3 ($\boldsymbol{\sigma}$-álgebra). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto. Se dice que una familia $\Im$ de subconjuntos de $\mathbb{F}$ es una σ-álgebra si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $\mathbb{F} \in \Im$.
2. $\Im$ *es cerrada bajo complementos.*
3. $\Im$ *es cerrada bajo uniones infinitas numerables.*

Obsérvese que toda σ-álgebra es también un álgebra. En efecto, como $\mathbb{F} \in \Im$ y $\Im$ es cerrada bajo complementos, el conjunto vacío $\emptyset$ pertenece a $\Im$. Así que, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son de elementos de $\Im$, entonces, definiendo $A_j = \emptyset$ para cualquier $j > n$, se tiene:

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Im$$

Una σ-álgebra $\Im$ de subconjuntos de $\mathbb{F}$ también es cerrada bajo intersecciones infinitas numerables, ya que, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\Im$, entonces:

$$\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c$$

Aunque está dicho en las definiciones, es importante enfatizar que un álgebra, o una σ-álgebra, es un conjunto cuyos elementos son conjuntos.

La necesidad de introducir el concepto de σ-álgebra proviene de que, en general, para definir una medida se sigue un procedimiento similar al que siguió Lebesgue para definir lo que podríamos llamar la longitud de un subconjunto de los números reales. Partió de que la longitud de un intervalo de extremos a y b está definida como la diferencia $b - a$ y se planteó entonces el problema de extender el concepto de longitud a todos los subconjuntos de los números reales. A lo que llegó es que es posible realizar esa extensión hasta abarcar una determinada familia de subconjuntos. Mostró también que la familia de conjuntos hasta donde es posible llevar su proceso de extensión, si bien no necesariamente está formada por todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$, es una familia bastante grande ya que es cerrada bajo complementos y uniones e intersericiones numerables; es decir, constituye lo que estamos definiendo como σ-álgebra.

Definición 4. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{G}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Llamaremos* ***álgebra generada por*** $\mathcal{G}$ *a la más pequeña familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$ que forme un álgebra y que contenga a todos los elementos de $\mathcal{G}$.*

Ejemplo 1. *Tomemos como $\mathbb{F}$ al conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.*

a) Definamos:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{3, 4, 5, 6\}$

El álgebra $\mathcal{A}$ generada por los conjuntos A y B está dada por:

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8, 9, 10, \ldots\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 2, 7, 8, 9, 10, \ldots\},$

$\{3, 4, 5, 6\}, \{3, 4, 7, 8, 9, 10, \ldots\}, \{5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$

$\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, \ldots\}, \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}, \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}, \mathbb{N}\}$

b) Sean A y B dos subconjuntos distintos de $\mathbb{N}$ y tales que $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cup B \neq \mathbb{N}$.

Con el objeto de tener conjuntos ajenos de tal manera que A, B y $\mathbb{N}$ se puedan expresar como unión de algunos de ellos, partiendo de A y B vamos a definir 2^2 conjuntos ajenos, de la siguiente manera:

$D_1 = A \cap B$

$D_2 = A \cap B^c$

$D_3 = A^c \cap B$

$D_4 = A^c \cap B^c$

El álgebra $\mathcal{A}$ generada por los conjuntos A y B está dada por:

$\mathcal{A} = \{\emptyset, D_1, D_2, D_3, D_4, D_1 \cup D_2, D_1 \cup D_3, D_1 \cup D_4, D_2 \cup D_3, D_2 \cup D_4, D_3 \cup D_4,$

$D_1 \cup D_2 \cup D_3, D_1 \cup D_2 \cup D_4, D_1 \cup D_3 \cup D_4, D_2 \cup D_3 \cup D_4, \mathbb{N}\}$

Ejemplo 2. *Tomemos como $\mathbb{F}$ al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales y definamos:*

$A = [1, 3]$

$B = [2, 4]$

Siguiendo el ejemplo 1b, definamos:

$D_1 = A \cap B = [2, 3]$

$D_2 = A \cap B^c = [1, 2)$

$D_3 = A^c \cap B = (3, 4]$

$D_4 = A^c \cap B^c = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

El álgebra $\mathcal{A}$ generada por los conjuntos A y B está dada por:

$\mathcal{A} = \{\emptyset, [2,3], [1,2), (3,4], (-\infty,1) \cup (4,\infty),$

$[1,3], [2,4], (-\infty,1) \cup [2,3] \cup (4,\infty), [1,2) \cup (3,4], (-\infty,2) \cup (4,\infty), (-\infty,1) \cup (3,\infty),$

$[1,4], (-\infty,3] \cup (4,\infty), (-\infty,1) \cup [2,\infty), (-\infty,2) \cup (3,\infty), \mathbb{R}\}$

Ejemplo 3. *Dados 3 subconjuntos, A, B y C, de un conjunto $\mathbb{F}$, podemos seguir el mismo procedimiento que seguimos para el caso de dos conjuntos. Considerando intersecciones, definimos 2^3 conjuntos:*

$D_1 = A \cap B \cap C$

$D_2 = A \cap B \cap C^c$

$D_3 = A \cap B^c \cap C$

$D_4 = A \cap B^c \cap C^c$

$D_5 = A^c \cap B \cap C$

$D_6 = A^c \cap B \cap C^c$

$D_7 = A^c \cap B^c \cap C$

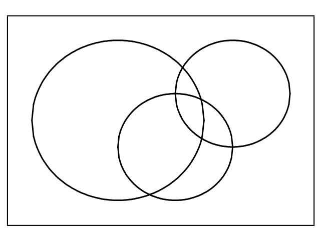
$D_8 = A^c \cap B^c \cap C^c$

Tomando el conjunto vacío, $\mathbb{F}$, cada uno de los 8 conjuntos, las $\binom{8}{2}$ uniones por parejas, las $\binom{8}{3}$ uniones por ternas, las $\binom{8}{4}$ uniones tomadas de 4 en 4, etcétera, hasta llegar a las $\binom{8}{7}$ uniones tomadas de 7 en 7, obtenemos un total de:

$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 2^8 = 256$

conjuntos.

Quitando los que se repitan, obtenemos el álgebra generada por los conjuntos A, B y C.



Ejercicio 1. *Tomando como $\mathbb{F}$ al conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, definamos A como el conjunto formado por todos los múltiplos de 2 y B como el conjunto formado por todos los múltiplos de 3. Encuentra los 16 conjuntos que forman el álgebra generada por A y B.*

Ejercicio 2. *Tomando como $\mathbb{F}$ al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, definamos A como el conjunto formado por la unión de todos los intervalos cerrados cuyos extremos sean dos números pares consecutivos y que no se intersecten y B como el conjunto formado por la unión de todos los intervalos cerrados cuyos extremos sean dos números impares consecutivos y que no se intersecten; es decir:*

$A = [2,4] \cup [6,8] \cup [10,12] \cup \cdots$

$B = [1,3] \cup [5,7] \cup [9,11] \cup \cdots$

Encuentra los 16 conjuntos que forman el álgebra generada por A y B.

Ejercicio 3. *Sea $\mathcal{J}$ el conjunto por el vacío y todos los intervalos de la forma $(a,b]$, $(-\infty,c]$ o (d,∞), donde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ y $a < b$.*

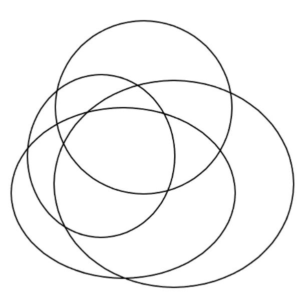
Demuestra que el conjunto $\mathcal{A}$ formado por todos los conjuntos de la forma $\bigcup_{k=1}^{n} J_k$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $J_1,\ldots,J_n$ son intervalos en $\mathcal{J}$, ajenos por parejas, es un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Proposición 1. *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n subconjuntos de un conjunto $\mathbb{F}$, $T = \{1,2,\ldots,n\}$ y $\mathcal{U}$ la familia de subconjuntos no vacíos de T. Si $U \in \mathcal{U}$, $U = \{i_1,\ldots,i_k\}$ y $T - U = \{j_1,\ldots,j_{n-k}\}$, definamos:*

$B_U = A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{j_1}^c \cap \cdots \cap A_{j_{n-k}}^c$

$\mathcal{C} = \{B_U : U \in \mathcal{U}\}$

Entonces, la familia $\mathcal{A}$ formada por el conjunto vacío y las uniones de 1 o más elementos de $\mathcal{C}$ constituye un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mathcal{A}$ es el álgebra denerada por $A_1, A_2, \ldots, A_n$.



Definición 5 (Intersección de σ-álgebras). *Dado un conjunto $\mathbb{F}$ y una familia arbitraria de σ-álgebras de subconjuntos de $\mathbb{F}$, se define la intersección de esas σ-álgebras como la familia de conjuntos que pertenecen a todas ellas.*

Se puede ver fácilmente que la intersección de σ-álgebras de subconjuntos de $\mathbb{F}$ es también una σ-álgebra y, dada una colección arbitraria $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $\mathbb{F}$, siempre existe por lo menos una σ-álgebra que contiene a todos los elementos de $\mathcal{B}$, a saber, la formada por todos los subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se puede definir entonces una σ-álgebra como la intersección de todas las σ-álgebras de subconjuntos de $\mathbb{F}$ que contienen a todos los elementos de $\mathcal{B}$.

Definición 6 (σ álgebra generada por una familia de conjuntos). *Dada una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $\mathbb{F}$, se define la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ como la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a todos los conjuntos de $\mathcal{A}$. Denotaremos por $\sigma(\mathcal{A})$ a esta σ-álgebra.*

Evidentemente la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ es la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ que contiene a todos los elementos de $\mathcal{A}$.

En general, la unión de σ-álgebras no es una σ-álgebra. Por ejemplo, si $A, B \subset \mathbb{R}$ y A es ditinto de B y de B^c, entonces $\{\emptyset, A, A^c, \mathbb{R}\}$ y $\emptyset, B, B^c, \mathbb{R}$ son dos σ-álgebras de subconjuntos de $\mathbb{R}$; pero, la unión de esas dos familias de conjuntos no es una σ-álgebra.

Incluso si se tiene una sucesión, $(\Im_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de σ-álgebras tales que $\Im_n \subset \Im_{n+1}$, propiamente, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la unión de ellas, en general, no es una σ-álgebra.

Ejemplo 4. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos la σ-álgebra, de subconjuntos de $\mathbb{N}$, generada por los conjuntos $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \cdots, \{n\}$.*

Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\Im_n \subset \Im_{n+1}$ y $\Im_n$ tiene 2^{n+1} elementos, cada uno de los cuales es, o bien el vacío, o bien la unión de 1 o más de los conjuntos $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \cdots, \{n\}$ y $\{1, 2, 3, \cdots, n\}^c$.

Definamos $\mathcal{G} = \cup_{n=1}^{\infty} \Im_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{n\}$.

Se tiene que $A_{2n} \in \mathcal{G}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$; así que, si $\mathcal{G}$ fuera una σ-álgebra, entonces el conjunto $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ pertenecería a $\mathcal{G}$; pero eso no es así.

En efecto:

Si $\{2n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{G}$, entonces $\{2n : n \in \mathbb{N}\} \in \Im_m$ para alguna $m \in \mathbb{N}$; pero $\{2n : n \in \mathbb{N}\} \notin \Im_m$ ya que cada elemento de $\Im_m$ es, o bien el vacío, o bien la unión de 1 o más de los conjuntos $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \cdots, \{m\}$ y $\{1, 2, 3, \cdots, m\}^c$.

Por otra parte, obsérvese que $\{m\} \in \cup_{n=1}^{\infty} \Im_n$ *para cualquier* $m \in \mathbb{N}$*. Así que, si denotamos por* $\Im$ *a la* σ*-álgebra generada por los elementos de la unión* $\cup_{n=1}^{\infty} \Im_n$*, entonces cualquier subconjunto de* $\mathbb{N}$ *pertenece a* $\Im$*; es decir,* $\Im$ *es el conjunto potencia de* $\mathbb{N}$*, el cual tiene la misma cardinalidad que el conjunto de los números reales.*

En cambio, como, para cualquier $n \in \mathbb{N}$*,* $\Im_n$ *contiene un número fnito de elementos, la unión* $\cup_{n=1}^{\infty} \Im_n$ *es una familia infinita numerable de subconjuntos de* $\mathbb{N}$*.*

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Los conjuntos borelianos deben su nombre a Émile Borel quien los introdujo para caracterizar a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ a los cuales se les puede asignar una longitud.

La idea fundamental consiste en que se puede asignar una longitud a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que se puedan obtener a partir de los intervalos mediante las operaciones conjuntistas de unión numerable y diferencia. La definición moderna se basa en la generación de σ-álgebras de acuerdo con la definición que dimos antes.

Cuando hablemos de intervalos de números reales, vamos a incluir tanto a los finitos como a los infinitos. Explícitamente, el conjunto de los intervalos de números reales está formado por todos los de los tipos siguientes:

1. Los intervalos con extremos a y b, de cualquier tipo, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.

2. Los intervalos de la forma $[a, a]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞) y $[a, \infty)$, donde a es un número real cualquiera.

3. El intervalo $(-\infty, \infty)$.

De acuerdo con lo anterior, no consideraremos como intervalo al conjunto vacío.

Cuando los dos extremos de un intervalo sean números reales, diremos que el intervalo es finito; en caso contrario, diremos que es infinito.

Si I es un intervalo, $\ell(I)$ denotará su longitud.

Definición 7 ($\boldsymbol{\sigma}$-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$). *La* σ*-álgebra de Borel en* $\mathbb{R}$*, la cual será denotada por* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$*, es la* σ*-álgebra de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *generada por la familia de todos los intervalos de números reales. A los elementos de esa* σ*-álgebra los llamaremos borelianos de* $\mathbb{R}$*.*

No todo boreliano de $\mathbb{R}$ es una unión numerable de intervalos o el complemento de una unión numerable de intervalos.

En efecto, denotemos por $\mathbb{Q}_1$ al conjunto de números racionales contenidos en el intervalo $(-\infty, 0)$ y por $\mathbb{Q}_2$ al conjunto de números racionales contenidos en el intervalo $[0, \infty)$. Definamos A como la unión del conjunto de números irracionales en $(-\infty, 0)$ y el conjunto de números racionales en $[0, \infty)$.

A^c es la unión del conjunto de números racionales en $(-\infty, 0)$ y el conjunto de números irracionales en $[0, \infty)$.

Obviamente A y A^c son borelianos.

$A \cap (-\infty, 0)$ es el conjunto de números irracionales en el intervalo $(-\infty, 0)$, así que no contienen ningún intervalo de longitud positiva. Por lo tanto, no se puede expresar como una unión numerable de intervalos. Se sigue entonces que A no se puede expresar como una unión numerable de intervalos.

$A^c \cap [0, \infty)$ es el conjunto de números irracionales en el intervalo $[0, \infty)$, así que no contienen ningún intervalo de longitud positiva. Por lo tanto, no se puede expresar como una unión numerable de intervalos. Se sigue entonces que A^c no se puede expresar como una unión numerable de intervalos.

Por lo tanto, A, al igual que A^c, no se puede expresar como una unión numerable de intervalos.

Proposición 2. *La σ-álgebra de los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$ está generada por cualquiera de las siguientes familias de conjuntos.*

1. *Los intervalos de la forma $(-\infty, x]$, donde $x \in \mathbb{R}$.*
2. *Los intervalos de la forma $(-\infty, x)$, donde $x \in \mathbb{R}$.*
3. *Los intervalos de la forma $[x, \infty)$, donde $x \in \mathbb{R}$.*
4. *Los intervalos de la forma (x, ∞), donde $x \in \mathbb{R}$.*
5. *Los intervalos de la forma (a, b), donde $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.*
6. *Los intervalos de la forma $(a, b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.*
7. *Los intervalos de la forma $[a, b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.*
8. *Los intervalos de la forma $[a, b)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.*

Demostración

Vamos a probar que la σ-álgebra, $\Im$, generada por los intervalos de la forma $(-\infty, x]$, donde $x \in \mathbb{R}$, contiene a todos los intervalos, con lo cual quedará demostrado que contiene a todos los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$. Aunado al hecho de que los intervalos de la forma $(-\infty, x]$, donde $x \in \mathbb{R}$, son borelianos, podremos concluir que $\Im$ coincide con la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$.

Sean $a, b, x \in \mathbb{R}$ con $a < b$; entonces:

$(-\infty, x) = \cup_{n=1}^{\infty}(-\infty, x - \frac{1}{n}] \in \Im$

$[x, \infty) = \mathbb{R} - (-\infty, x) \in \Im$

$(x, \infty) = \mathbb{R} - (-\infty, x] \in \Im$

$(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty) \in \Im$

$(a, b] = (-\infty, b] \cap (a, \infty) \in \Im$

$[a, b] = (-\infty, b] \cap [a, \infty) \in \Im$

$[a, b) = (-\infty, b) \cap [a, \infty) \in \Im$

$[x, x] = (-\infty, x] \cap [x, \infty) \in \Im$

$(-\infty, \infty) = \mathbb{R} \in \Im$

Con esto queda demostrado que $\Im = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Por otra parte, si $c, d, y \in \mathbb{R}$ con $c < d$, se tiene:

$(-\infty, y] = \cap_{n=}^{\infty} \left(-\infty, y + \frac{1}{n}\right)$

Así que, $\Im$ está contenida en la σ-álgebra, $\Im_1$, generada por los intervalos de la forma $(-\infty, x)$, donde $x \in \mathbb{R}$.

$(-\infty, y) = \mathbb{R} - [y, \infty)$

Así que, $\Im_1$ está contenida en la σ-álgebra, $\Im_2$, generada por los intervalos de la forma $[x, \infty)$, donde $x \in \mathbb{R}$.

$[y, \infty) = \cup_{n=1}^{\infty} [y, y+n)$

Así que, $\Im_2$ está contenida en la σ-álgebra, $\Im_3$, generada por los intervalos de la forma (x, ∞), donde $x \in \mathbb{R}$.

$(y, \infty) = \cup_{n=1}^{\infty} (y, y+n)$

Así que, $\Im_3$ está contenida en la σ-álgebra, $\Im_4$, generada por los intervalos de la forma (a, b), donde $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.

$(c, d) = \cup_{\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < d-c\right\}} (c, d - \frac{1}{n}]$

Así que, $\Im_4$ está contenida en la σ-álgebra, $\Im_5$, generada por los intervalos de la forma $(a, b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.

$(c, d] = \cup_{\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < d-c\right\}} \left[c + \frac{1}{n}, d\right]$

Así que, $\Im_5$ está contenida en la σ-álgebra, $\Im_6$, generada por los intervalos de la forma $[a, b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.

$[c, d] = \cap_{n=1}^{\infty} \left[c, d + \frac{1}{n}\right)$

Así que, $\Im_6$ está contenida en la σ-álgebra, $\Im_7$, generada por los intervalos de la forma $[a, b)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.

Tenemos entonces las siguientes relaciones:

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \Im \subset \Im_1 \subset \Im_2 \subset \Im_3 \subset \Im_4 \subset \Im_5 \subset \Im_6 \subset \Im_7 \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R})$$

Por lo tanto, $\Im_k = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ para cualquier $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

$\blacksquare$

Proposición 3. *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ está generada por la familia formada por los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$.*

Demostración

La σ-álgebra, $\mathcal{G}$, generada por la familia formada por los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, contiene a los intervalos abiertos, los cuales generan la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$; por lo tanto, $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}$.

Ahora vamos a probar que cualquier subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ se puede expresar como la unión de una familia numerable de intervalos abiertos.

Sea G un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}$ y consideremos el conjunto de intervalos abiertos, con centro y radio números racionales, contenidos en G. Ese conjunto es numerable; denotemos sus elementos por $J_1, J_2, J_3, \ldots$.

Como G es un conjunto abierto, para cada $x \in G$ existe un intervalo abierto $I_0 = (x - \delta, x + \delta)$, de centro x y radio $\delta > 0$, contenido en G.

Tomando un número racional positivo r menor que δ, podemos reemplazar I_0 por el intervalo $I = (x - r, x + r)$.

Tomemos ahora un número racional y dentro del intervalo $\left(x - \frac{1}{2}r, x + \frac{1}{2}r\right)$; entonces:

$$x - \tfrac{1}{2}r < y < x + \tfrac{1}{2}r$$

Por lo tanto:

$y - \frac{1}{2}r < x < y + \frac{1}{2}r$

y

$x - r < y - \frac{1}{2}r < y + \frac{1}{2}r < x + r$

Así que, x es un elemento del intervalo $J = \left(y - \frac{1}{2}r, y + \frac{1}{2}r\right)$ y $J \subset I \subset G$.

En otras palabras, cada elemento x de G pertenece a alguno de los intervalos de la familia $J_1, J_2, J_3, \ldots$.

Por lo tanto, $G = \cup_n J_n$.

Cualquier subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}$ es entonces un conjunto boreliano. Por lo tanto, $\mathcal{G} \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

■

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$

Definición 8. *Por una celda en $\mathbb{R}^n$ se entenderá un conjunto de la forma $I_1 \times \cdots \times I_n$, donde $I_1, \cdots, I_n$ son intervalos en $\mathbb{R}$.*

Obviamente, si $R = I_1 \times \cdots \times I_n$ entonces R es un conjunto acotado si y sólo si los intervalos $I_1, \cdots, I_n$ son finitos. De la misma manera, R es un conjunto abierto (resp. cerrado) si y sólo si los intervalos $I_1, \cdots, I_n$ son abiertos (resp. cerrados).

Denotaremos por $\mathcal{R}$ a la familia de celdas en $\mathbb{R}^n$.

Definición 9 ($\boldsymbol{\sigma}$-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$). *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$, la cual será denotada por $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, es la σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ generada por $\mathcal{R}$. A los elementos de esa σ-álgebra los llamaremos borelianos de $\mathbb{R}^n$.*

Proposición 4. *La σ-álgebra generada por la familia de celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma $(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$, donde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, contiene a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ de la forma $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$, donde $B_1, \ldots, B_n$ son borelianos de $\mathbb{R}$.*

Demostración

Sea $\mathcal{H}$ la σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ generada por la familia de celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma $(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$, donde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $U \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, definamos la sucesión de intervalos $\left(J_k^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ y el intervalos J_k de la siguiente manera:

$$J_k = \begin{cases} (-\infty, x_k] & \text{si } k \notin U \\ \mathbb{R} & \text{si } k \in U \end{cases}$$

$$J_k^{(m)} = \begin{cases} (-\infty, x_k] & \text{si } k \notin U \\ (-\infty, m] & \text{si } k \in U \end{cases}$$

Se tiene:

$J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} J_1^{(m)} \times J_2^{(m)} \times \cdots \times J_n^{(m)}$.

Así que $J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n \in \mathcal{H}$.

Definamos $\mathcal{G} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

Por lo anterior, $I_1 \times \cdots \times I_n \in \mathcal{H}$, para cualquier celda $I_1 \times \cdots \times I_n$ donde $I_k \in \mathcal{G}$ para cualquier $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

La idea de lo que sigue consiste en ir reemplazando, uno por uno, los intervalos $I_1, \cdots, I_n$ por borelianos en $\mathbb{R}$.

Definamos:

$\mathcal{H}_n = \{B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : I_1 \times \cdots \times I_{n-1} \times B \in \mathcal{H}$ para cualquier celda $I_1 \times \cdots \times I_{n-1}$, donde $I_k \in \mathcal{G}\}$

Se puede mostrar fácilmente que $\mathcal{H}_n$ forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Además, por lo visto anteriormente:

$\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{H}_n$

Por lo tanto, $\mathcal{H}_n$ contiene a todos los borelianos de $\mathbb{R}$.

Sea ahora B_n un boreliano de $\mathbb{R}$ cualquiera y definamos:

$\mathcal{H}_{n-1} = \{B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : I_1 \times \cdots \times I_{n-2} \times B \times B_n \in \mathcal{H}$

para cualquier celda $I_1 \times \cdots \times I_{n-2}$, donde $I_k \in \mathcal{G}\}$

Nuevamente, se puede mostrar fácilmente que $\mathcal{H}_{n-1}$ forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Además, por lo demostrado en el paso anterior:

$\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{H}_{n-1}$

Por lo tanto, $\mathcal{H}_{n-1}$ contiene a todos los borelianos de $\mathbb{R}$.

Continuando con este procedimiento, se obtiene que los conjuntos de la forma $I \times B_2 \times \ldots \times B_n$, donde $I \in \mathcal{G}$ y $B_2, \ldots, B_n$ son borelianos cualesquiera de $\mathbb{R}$, pertenecen a $\mathcal{H}$.

Finalmente, si $B_2, \ldots, B_n$ son borelianos cualesquiera de $\mathbb{R}$ y definimos:

$\mathcal{H}_1 = \{B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : B \times B_2 \times \ldots \times B_n \in \mathcal{H}\}$

Entonces $\mathcal{H}_1$ es una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$, la cual contiene a los intervalos de la forma $(-\infty, x]$, donde $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, contiene a todos los borelianos de $\mathbb{R}$.

Así que, $\mathcal{H}$ contiene a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ de la forma $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$, donde $B_1, \ldots, B_n$ son borelianos de $\mathbb{R}$.

$\blacksquare$

Corolario 1. *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ está generada por la familia de celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma $(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$, donde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.*

Corolario 2. *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ está generada por la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ de la forma $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$, donde $B_1, \ldots, B_n$ son borelianos de $\mathbb{R}$.*

Teorema 1. *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ está generada por cualquiera de las siguientes familias de conjuntos:*

$\mathcal{D}_0$*: Las celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma:*

$(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$, *donde* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{D}_1$*: Las celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma:*

$(-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \cdots \times (-\infty, x_n)$, *donde* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{D}_2$*: Las celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma;*

$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n]$, *donde* $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{D}_3$*: Las celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma:*

$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, *donde* $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{D}_4$*: Las celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma:*

$[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)$, *donde* $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{D}_5$*: Las celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma:*

$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, *donde* $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

Demostración

Vamos a demostrar que se tienen las siguientes contenciones:

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{D}_0) \subset \sigma(\mathcal{D}_1) \subset \sigma(\mathcal{D}_2) \subset \sigma(\mathcal{D}_3) \subset \sigma(\mathcal{D}_4) \subset \sigma(\mathcal{D}_5) \subset \sigma(\mathcal{D}_0) \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$$

a) La σ-álgebra generada por $\mathcal{D}_0$ es la σ-álgebra $\mathcal{H}$ definida en la proposición **??**, en la cual demostramos que $\mathcal{H}$ contiene a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ de la forma $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$, donde $B_1, \ldots, B_n$ son borelianos de $\mathbb{R}$.

En particular, $\mathcal{H}$ contiene a cualquier celda en $\mathbb{R}^n$, así que contiene a todos los borelianos de $\mathbb{R}^n$; es decir, $\sigma(\mathcal{D}_0) \supset \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

b) Sea $(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n] \in \mathcal{D}_0$, entonces:

$(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$

$= \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(-\infty, x_1 + \frac{1}{m}\right) \times \left(-\infty, x_2 + \frac{1}{m}\right) \times \cdots \times \left(-\infty, x_n + \frac{1}{m}\right) \in \sigma(\mathcal{D}_1)$.

Así que, $\sigma(\mathcal{D}_0) \subset \sigma(\mathcal{D}_1)$.

c) Sea $(-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \cdots \times (-\infty, x_n) \in \mathcal{D}_1$, entonces:

$(-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \cdots \times (-\infty, x_n)$

$= \bigcup_{m=1}^{\infty} (-m, x_1 - \frac{1}{m}] \times (-m, x_2 - \frac{1}{m}] \times \cdots \times (-m, x_n - \frac{1}{m}] \in \sigma(\mathcal{D}_2)$.

Así que, $\sigma(\mathcal{D}_1) \subset \sigma(\mathcal{D}_2)$.

d) Sea $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n] \in \mathcal{D}_2$, entonces:

$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n]$

$= \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(a_1, b_1 + \frac{1}{m}\right) \times \left(a_2, b_2 + \frac{1}{m}\right) \times \cdots \times \left(a_n, b_n + \frac{1}{m}\right) \in \sigma(\mathcal{D}_3)$.

Así que, $\sigma(\mathcal{D}_2) \subset \sigma(\mathcal{D}_3)$.

e) Sea $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \in \mathcal{D}_3$, entonces:

$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$

$= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[a_1 + \frac{1}{m}, b_1\right) \times \left[a_2 + \frac{1}{m}, b_2\right) \times \cdots \times \left[a_n + \frac{1}{m}, b_n\right) \in \sigma(\mathcal{D}_4)$.

Así que, $\sigma(\mathcal{D}_3) \subset \sigma(\mathcal{D}_4)$.

f) Sea $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n) \in \mathcal{D}_4$, entonces:

$[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)$

$= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[a_1, b_1 - \frac{1}{m}\right] \times \left[a_2, b_2 - \frac{1}{m}\right] \times \cdots \times \left[a_n, b_n - \frac{1}{m}\right] \in \sigma(\mathcal{D}_5)$.

Así que, $\sigma(\mathcal{D}_4) \subset \sigma(\mathcal{D}_5)$.

g) Cualquier celda en $\mathcal{D}_5$ es un conjunto de la forma $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$, donde $B_1, \ldots, B_n$ son borelianos de $\mathbb{R}$, y, de acuerdo con la proposición **??**, cualquiera de estos conjuntos pertenece a $\sigma(\mathcal{D}_0)$.

Así que, $\sigma(\mathcal{D}_5) \subset \sigma(\mathcal{D}_0)$.

h) Todo elemento de $\mathcal{D}_0$ es un conjunto boreliano de $\mathbb{R}^n$; así que $\sigma(\mathcal{D}_0) \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

Por lo tanto:

$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{D}_0) \subset \sigma(\mathcal{D}_1) \subset \sigma(\mathcal{D}_2) \subset \sigma(\mathcal{D}_3) \subset \sigma(\mathcal{D}_4) \subset \sigma(\mathcal{D}_5) \subset \sigma(\mathcal{D}_0) \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$

De lo cual se sigue que:

$$\sigma(\mathcal{D}_0) = \sigma(\mathcal{D}_1) = \sigma(\mathcal{D}_2) = \sigma(\mathcal{D}_3) = \sigma(\mathcal{D}_4) = \sigma(\mathcal{D}_5) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$$

■

Proposición 5. *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ está generada por la familia de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración

Sea G un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces, para cada $x \in G$ existe una bola abierta B de centro x y radio $s > 0$ contenida en G.

Sea r un número racional positivo menor que s y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ un elemento de la bola abierta de centro x y radio $\frac{1}{2n}r$ tal que, para cualquier $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, y_k es un número racional.

Obviamente x pertenece a la bola abierta de centro y y radio $\frac{1}{2n}r$, la cual está contenida en B.

Definamos:

$C = \left(y_1 - \frac{1}{2n}r, y_1 + \frac{1}{2n}r\right) \times \left(y_2 - \frac{1}{2n}r, y_2 + \frac{1}{2n}r\right) \times \cdots \times \left(y_n - \frac{1}{2n}r, y_n + \frac{1}{2n}r\right).$

La distancia entre dos elementos cualesquiera de C es menor que la distancia entre los puntos $\left(y_1 - \frac{1}{2n}r, y_2 - \frac{1}{2n}r, \ldots, y_n - \frac{1}{2n}r\right)$ y $\left(y_1 + \frac{1}{2n}r, y_2 + \frac{1}{2n}r, \ldots, y_n + \frac{1}{2n}r\right)$, la cual es igual a $\frac{1}{\sqrt{n}}r$.

Como x pertenece a la bola abierta de centro y y radio $\frac{1}{2n}r$, si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces $|x_k - y_k| < \frac{1}{2n}r$ para cualquier $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, así que $x \in C$. Por lo tanto, si $z \in C$, entonces:

$d(z, x) < \frac{1}{\sqrt{n}}r \leq r < s.$

Así que $C \subset B \subset G$.

Denotemos por $\mathcal{C}$ al conjunto de celdas en $\mathbb{R}^n$ de la forma $(r_1, s_1) \times (r_2, s_2) \times \cdots \times (r_n, s_n)$, donde $r_1, s_1, r_2, s_2, \ldots, r_n, s_n$ son números racionales. $\mathcal{C}$ es entonces un conjunto numerable y, por lo anterior, para cada $x \in G$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$ y $C \subset G$.

Por lo tanto, G se puede expresar como la unión de una colección finita o infinita numerable de conjuntos en $\mathcal{C}$, cada uno de los cuales un boreliano de $\mathbb{R}^n$. Así que G es un boreliano de $\mathbb{R}^n$.

Finalmente, la familia de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ contiene a las celdas en $\mathbb{R}^n$ de la forma $(-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \cdots \times (-\infty, x_n)$, donde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, las cuales generan a la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$. Así que también la familia de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ genera a la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$.

■

Proposición 6. *Supongamos que A y B son dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, entonces, A y B pertenecen a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Demostración

Si $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ y $x \in \mathbb{R}$, definamos:

$E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$

Sea $\mathcal{H} = \{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) : E_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ para cualquier } x \in \mathbb{R}\}$.

$\mathcal{H}$ es una σ-álgebra que contiene a los conjuntos de la forma $C \times D$, donde C y D son dos conjuntos no vacíos en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Por lo tanto, $\mathcal{H}$ contiene a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Así que:

$E_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para cualquier $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ y $x \in \mathbb{R}$.

En particular, como $F = A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ y $A \neq \emptyset$, se tiene:

$B = F_x$ para cualquier $x \in A$.

Así que, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

De la misma manera, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\blacksquare$